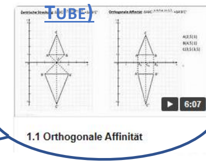
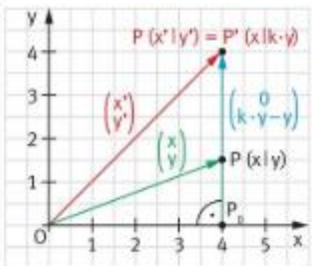
Orthogonale Affinität

Zur Erinnerung 💻 [Matheschweikelberg (You Tube)]





Der Punkt P (x | y) wird auf den Punkt P' (x' | y') so abgebildet, dass die Verbindungsgerade von Ur- und zugehörigem Bildpunkt senkrecht auf der x-Achse steht und bezogen auf den Schnittpunkt P_0 von Verbindungsgerade und x-Achse gilt:
$\overrightarrow{P_0P'} = k \cdot \overrightarrow{P_0P}$ mit $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

- Was lässt sich über die Lage des Punktes P' aussagen für $k > 1$ ($0 < k < 1$; $-1 < k < 0$; $k < -1$)?
- Ermittle die Koordinaten des Punktes P'. Berechne hierfür die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{OP'}$ durch Verkettung der Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{PP'}$.
- Eine solche Abbildung heißt orthogonale Affinität. Die x-Achse heißt Affinitätsachse, k heißt Affinitätsmaßstab. Stelle die kartesischen Koordinaten von P' (x' | y') über die Multiplikation einer Matrix mit dem Ortsvektor zu P dar.

Heft

MERKWISSEN

Bildet man einen Punkt P (x | y) durch **orthogonale Affinität** mit der x-Achse als **Affinitätsachse** und dem **Affinitätsmaßstab** k ($k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$) ab ($\mathbb{G} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$), so lassen sich die kartesischen Koordinaten des Bildpunktes P' (x' | y') über die Multiplikation einer Matrix mit dem Ortsvektor zu P berechnen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ P' (x | k · y)

Bitte übertragt die folgenden Aufgaben ins Heft.

1. Beispiel mit Lösung

Das Dreieck ABC mit A (1 | 2), B (6 | 4) und C (5 | 5) wird durch orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab k = 3 auf das Dreieck A'B'C' abgebildet. Berechne die Koordinaten von A', B' und C'.

2. Arthur

Bilde die zu den folgenden Gleichungen gehörenden Funktionsgraphen jeweils durch orthogonale Affinität ab (Affinitätsachse: x-Achse) und bestimme die Gleichung des Bildgraphen.
Überprüfe die Ergebnisse zeichnerisch.

a) $y = \frac{1}{4}x - 2;\quad k = 3$

b) $y = -2x^2 + 5;\quad k = -\frac{1}{4}$

c) $y = 2\sqrt{x} + 6;\quad k = 2{,}5$

d) $y = \log_3(x+1) - 3;\quad k = -\frac{2}{3}$

3. Lena

Das Dreieck ABC mit A(1|–5), B(10|0) und C(6|2) wird durch orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse auf ein in C' rechtwinkliges Bilddreieck A'B'C' abgebildet. Berechne den Affinitätsmaßstab $k \in \mathbb{R}^+$.

4. Lea

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = -2 \cdot 1{,}5^{x+1} + 4$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

a) Gib die Definitionsmenge, die Wertemenge sowie die Gleichung der Asymptote der Funktion f an.

b) Der Graph zu f wird durch orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse auf den Graphen zu f' abgebildet. Dabei liegt der Punkt P'(2|8,25) auf dem Graphen zu f'.
Berechne zunächst den Affinitätsmaßstab k und anschließend die Gleichung der Bildfunktion f'. Es gilt: $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) Ermittle zur Funktion f die Gleichung der Umkehrfunktion f^{-1}.

Lösung 1:

Lösung:

$A\,(1|2) \xmapsto{\text{x-Achse; } k = 3} A'\,(x'|y')$ $\qquad \mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad A'\,(1|6)$$

Analog ergibt sich: B' (6|12); C' (5|15)