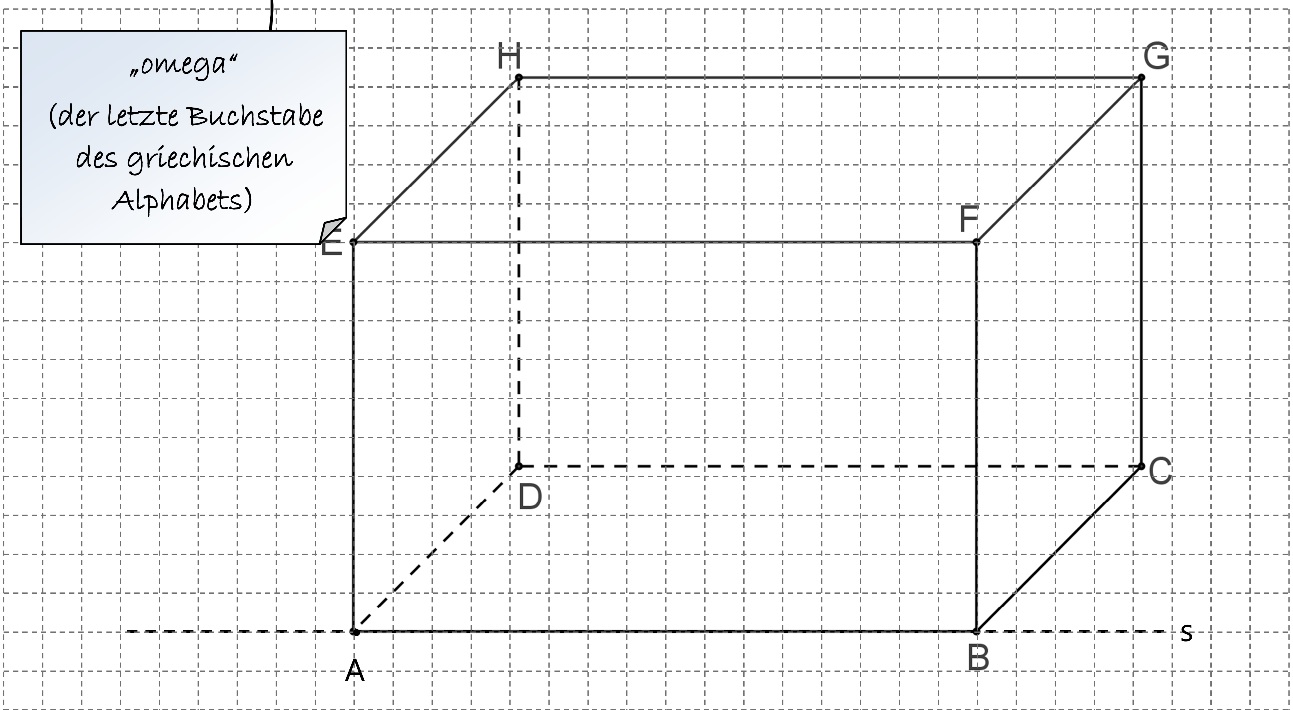
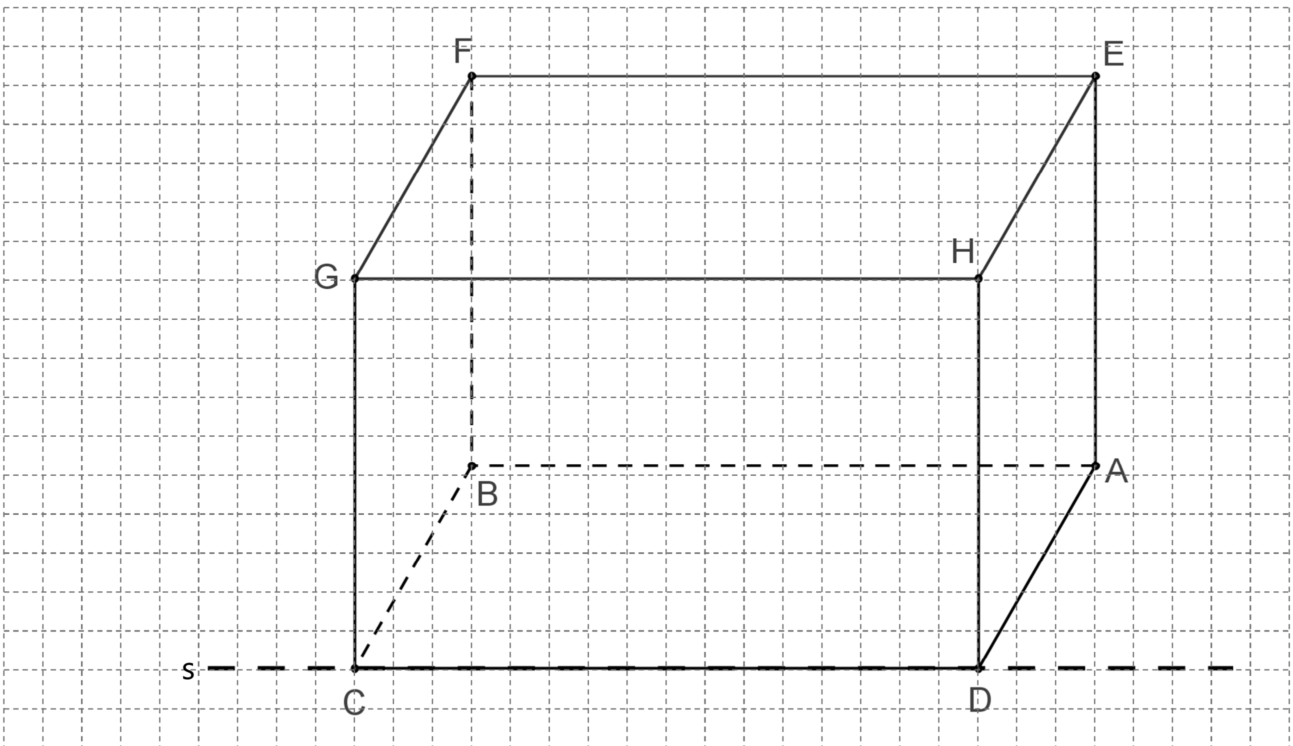
8.1 Darstellen von Körpern im Schrägbild

→ Zeichnen von Schrägbildern verschiedener Körper (Quader, Pyramide, Prisma)

❶ Zeichne das Schrägbild des Quaders ABCDEFGH mit $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm und $\overline{AE} = 5$ cm. Die Strecke [AB] soll auf der Schrägbildachse s liegen. Wähle $q = \frac{1}{2}$ als Verzerrungsfaktor und ω = 45° als Verzerrungswinkel. Die Schrägbildachse und der Punkt A sind schon vorgezeichnet.



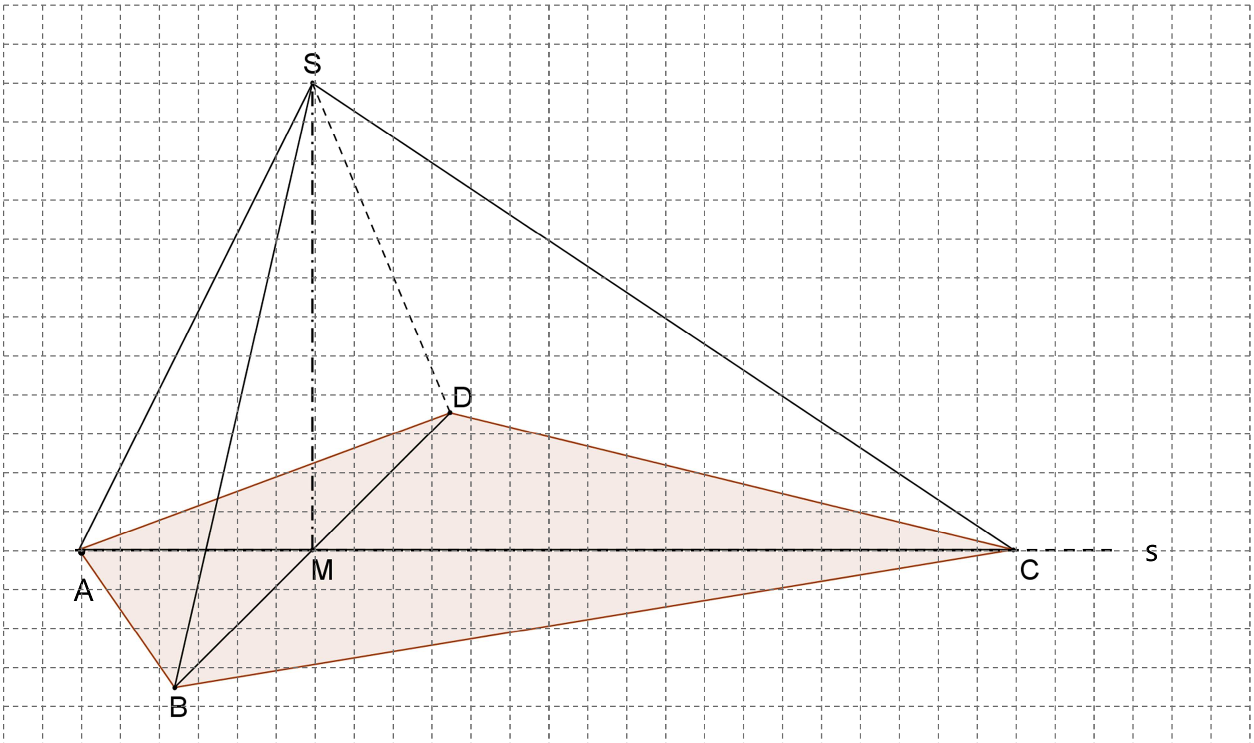
❷ Zeichne ein Schrägbild des Quaders aus Aufgabe ❶ für $q = \frac{1}{2}$, ω = 60°. Diesmal soll [CD] auf der Schrägbildachse liegen.



❸ Das Drachenviereck ABCD mit AC als Symmetrieachse ist die Grundfläche der Pyramide ABCDS. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Schnittpunkt M der beiden Diagonalen des Drachenvierecks. Folgende Maße sind gegeben:

$\overline{AC}$= 12 cm, $\overline{BD}$= 10 cm, $\overline{AM}$= 3 cm und $\overline{MS}$= 6 cm.

a) Zeichne das Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei [AC] auf der Schrägbildachse liegen soll. Wähle q = 0,5 und ω = 45°.



b) Im Schrägbild kannst du nicht alle Winkel und Streckenlängen abmessen, denn viele (Original-)Maße werden ja durch die Schrägbilddarstellung verzerrt dargestellt.

☞ Gib drei Streckenlängen an, deren (wahre) Länge du im obigen Schrägbild durch Abmessen angeben könntest.

$\overline{AC}$ = 12 cm, $\overline{MS}$ = 6 cm, $\overline{AS}$ ≈ 6,7 cm, $\overline{CS}$ ≈ 10,8 cm

☞ Gib ebenso drei Streckenlängen an, deren (wahre) Länge du nicht durch Abmessen bestimmen kannst.

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{BS}$, $\overline{DS}$

☞ Gib zudem drei Winkel an, deren (wahres) Maß du nicht in der Zeichnung abmessen kannst.

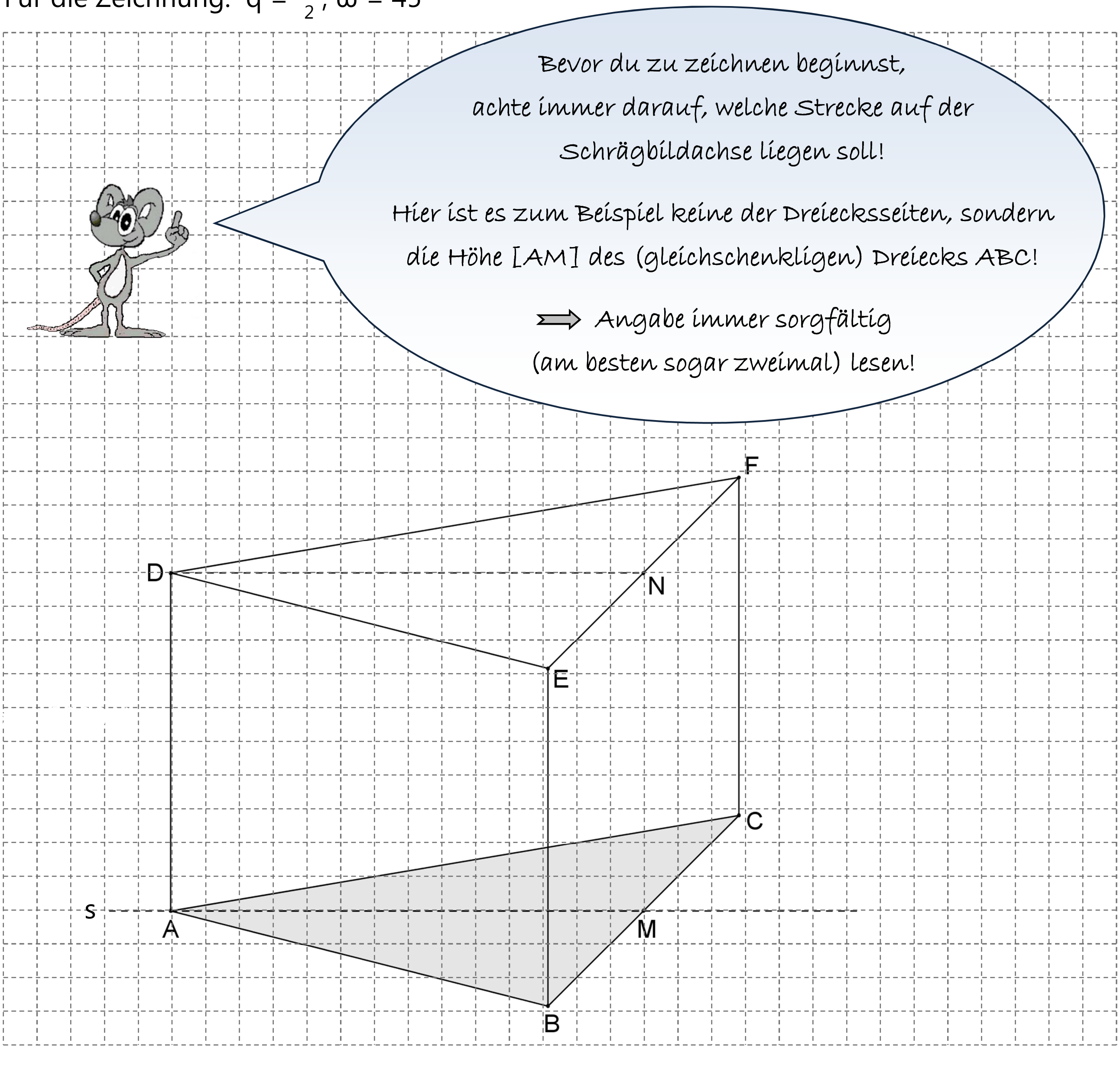
∢MBS, ∢MDS, ∢BSD, ∢CBA, ∢ADC, ...

☞ Welche Winkel erscheinen im obigen Schrägbild überhaupt in wahrer Größe?

∢MAS (∢CAS), ∢ASC, ∢SCM (∢SCA), ∢CMS, ∢SMA, ∢ASM, ∢MSC

❹ Im gleichschenkligen Dreieck ABC ist M der Mittelpunkt der Basis [BC]. Es gilt:
$\overline{BC} = 8$ cm und $\overline{AM} = 7$ cm.
Das Dreieck ABC ist die Grundfläche des geraden Prismas ABCDEF mit der Höhe $\overline{AD} = 5$ cm.
Der Punkt N ist der Mittelpunkt der Strecke [EF].

Zeichne ein Schrägbild des Prismas ABCDEF. Dabei soll [AM] auf der Schrägbildachse liegen.
Für die Zeichnung: $q = \frac{1}{2}$, $\omega = 45°$



Übrigens: Die in diesem - ebenso wie im nächsten - Kapitel abgedruckten Aufgaben sind meist „echte“ Abschlussprüfungsaufgaben der vergangenen Jahre (natürlich musst du in der Abschlussprüfung noch viele weitere Größen dieser Körper berechnen, z.B. gewisse Winkelmaße oder das Volumen). Nur in der Formulierung wurden diese Aufgaben hier etwas vereinfacht (in der zehnten Klasse wirst du nämlich ebenso wie auch in der Abschlussprüfung „ge-Sie-zt“).

8.2 Berechnen von Längenmaßen im Raum

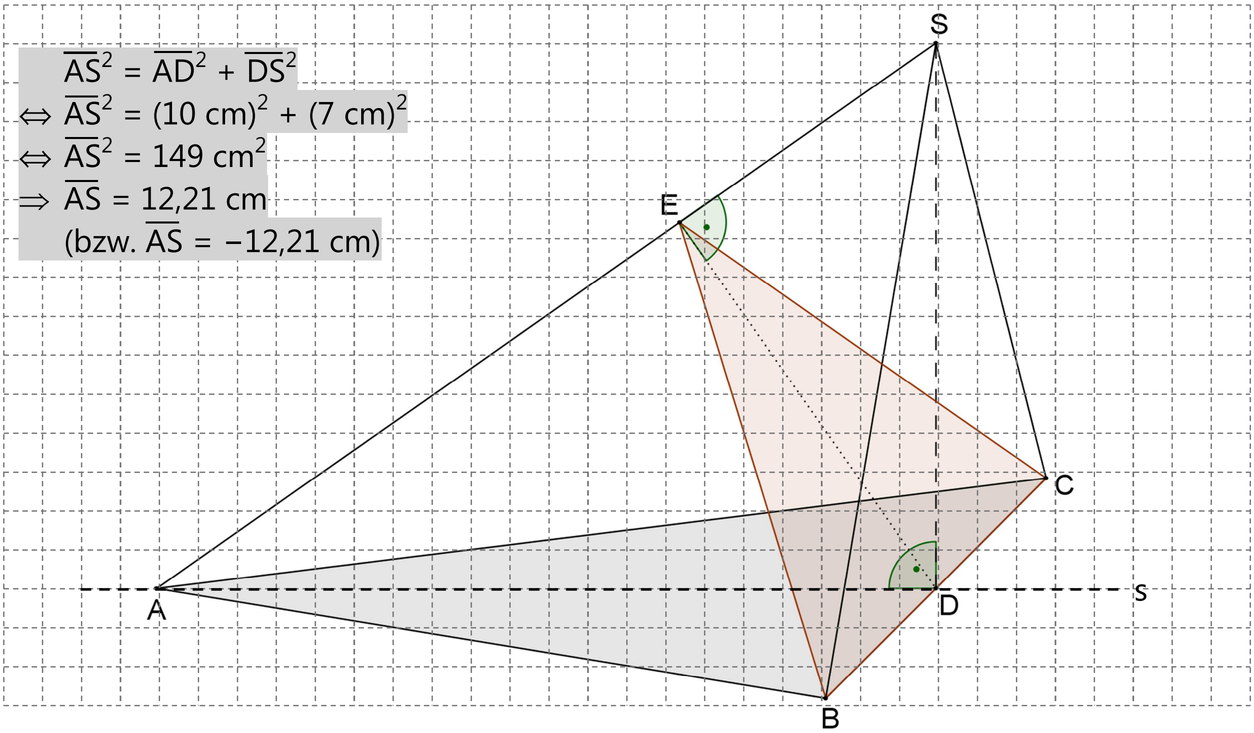
→ Zeichnen von Schrägbildern und Berechnung einiger Streckenlängen dazu (v.a. Abschlussprüfungsaufgaben)

❶ Im gleichschenkligen Dreieck ABC ist D der Mittelpunkt der Basis [BC] mit $\overline{AD} = 10$ cm und $\overline{BC} = 8$ cm. Das Dreieck ABC ist die Grundfläche der Pyramide ABCS mit der Höhe $\overline{DS} = 7$ cm, wobei die Pyramidenspitze S senkrecht über D liegt.

a) Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCS, wobei [AD] auf der Schrägbildachse liegen soll. Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$, $\omega = 45°$

Berechne anschließend die Länge der Strecke [AS] auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

$$\begin{aligned} & \overline{AS}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DS}^2 \\ \Leftrightarrow\ & \overline{AS}^2 = (10\text{ cm})^2 + (7\text{ cm})^2 \\ \Leftrightarrow\ & \overline{AS}^2 = 149\text{ cm}^2 \\ \Rightarrow\ & \overline{AS} = 12{,}21\text{ cm} \\ & (\text{bzw. } \overline{AS} = -12{,}21\text{ cm}) \end{aligned}$$



b) Der Punkt E liegt auf der Strecke [AS] und es gilt: $\overline{ES} = 4$ cm und $[DE] \perp [AS]$. Zeichne die Strecken [DE], [BE] und [CE] in das Schrägbild aus Teilaufgabe a) ein und berechne den Flächeninhalt des Dreiecks BCE (auf zwei Nachkommastellen runden).

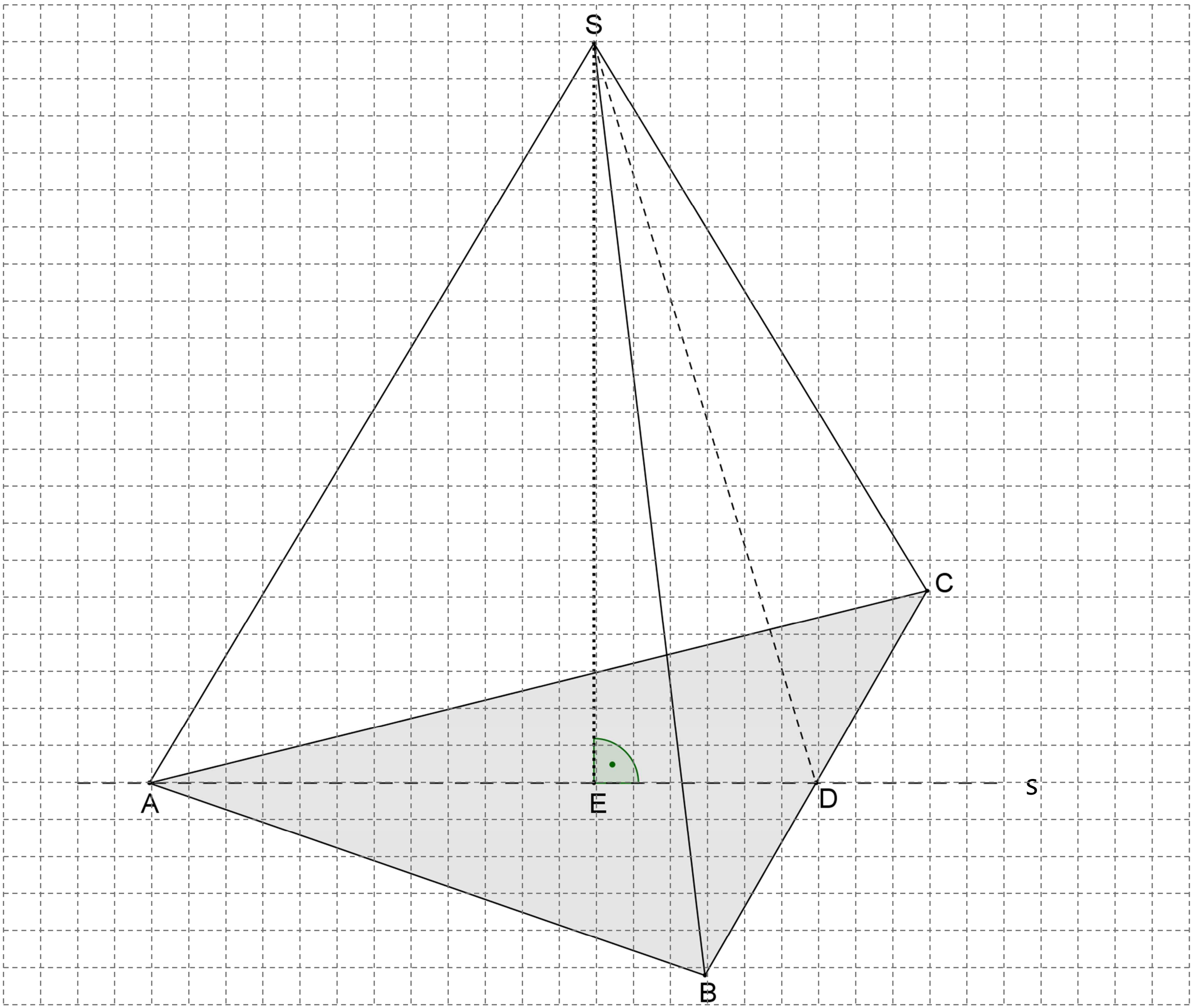
$$\begin{aligned} & \overline{DE}^2 + \overline{ES}^2 = \overline{DS}^2 \\ \Leftrightarrow\ & \overline{DE}^2 = \overline{DS}^2 - \overline{ES}^2 \\ \Leftrightarrow\ & \overline{DE}^2 = (7\text{ cm})^2 - (4\text{ cm})^2 \\ \Leftrightarrow\ & \overline{DE}^2 = 49\text{ cm}^2 - 16\text{ cm}^2 \\ \Leftrightarrow\ & \overline{DE}^2 = 33\text{ cm}^2 \\ \Rightarrow\ & \overline{DE} = 5{,}74\text{ cm} \quad (\text{bzw. } \overline{DE} = -5{,}74\text{ cm}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{BCE} &= \tfrac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{DE} \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot 8\text{ cm} \cdot 5{,}74\text{ cm} \\ &= 22{,}96\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Lösungen: $\overline{AS} = 12{,}21$ cm • $\overline{DE} = 5{,}74$ cm • $A_{BCE} = 22{,}96$ cm²

❷ Das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis [BC] ist die Grundfläche der Pyramide ABCS. D ist der Mittelpunkt der Basis [BC]. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Punkt $E \in [AD]$. Es gilt: $\overline{BC} = 12$ cm , $\overline{AD} = 9$ cm , $\overline{DE} = 3$ cm und $\overline{ES} = 10$ cm.

a) Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCS, wobei [AD] auf der Schrägbildachse liegen soll. Für die Zeichnung gilt: $q = 0{,}5$; $\omega = 60°$



b) Berechne die Länge der Strecke [DS] und den Flächeninhalt des Dreiecks BCS auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

$\overline{ED}^2 + \overline{ES}^2 = \overline{DS}^2$
$\Leftrightarrow (3\text{ cm})^2 + (10\text{ cm})^2 = \overline{DS}^2$
$\Leftrightarrow 109\text{ cm}^2 = \overline{DS}^2$
$\Rightarrow \overline{DS} = 10{,}44\text{ cm}$ (bzw. $\overline{DS} = -10{,}44$ cm)

$A_{BCS} = 0{,}5 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{DS}$
$= 0{,}5 \cdot 12\text{ cm} \cdot 10{,}44\text{ cm}$
$= 62{,}64\text{ cm}^2$

c) Wie lang ist die Kante [CS] ?

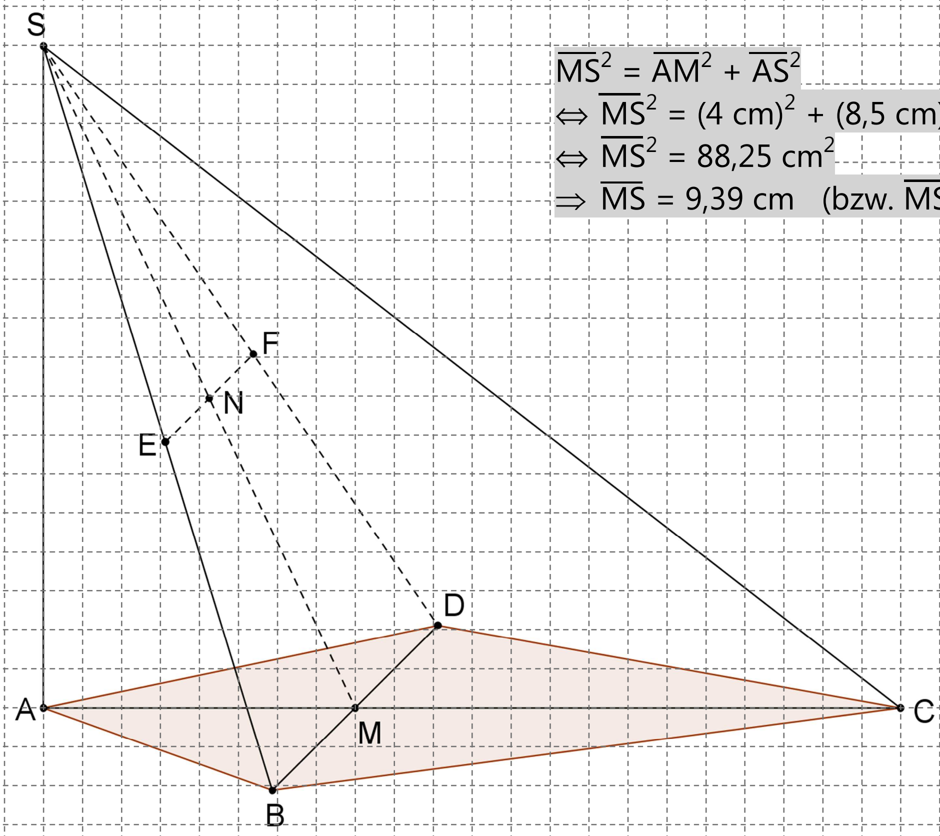
$\overline{CD}^2 + \overline{DS}^2 = \overline{CS}^2 \Leftrightarrow (6\text{ cm})^2 + (10{,}44\text{ cm})^2 = \overline{CS}^2 \Rightarrow \overline{CS} = 12{,}04\text{ cm}$
(bzw. $\overline{CS} = -12{,}04$ cm)

Lösungen: $\overline{DS} = 10{,}44$ cm • $A_{BCS} = 62{,}64\text{ cm}^2$ • $\overline{CS} = 12{,}04$ cm

❸ Das Drachenviereck ABCD mit AC als Symmetrieachse und M als Diagonalenschnittpunkt ist die Grundfläche der Pyramide ABCDS. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Punkt A und es gilt: $\overline{AC} = 11$ cm, $\overline{BD} = 6$ cm, $\overline{AM} = 4$ cm und $\overline{AS} = 8{,}5$ cm .

a) Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei [AC] auf der Schrägbildachse liegen soll. Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$, $\omega = 45°$

Berechne anschließend die Länge der Strecke [MS] auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.



$\overline{MS}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AS}^2$

$\Leftrightarrow \overline{MS}^2 = (4\text{ cm})^2 + (8{,}5\text{ cm})^2$

$\Leftrightarrow \overline{MS}^2 = 88{,}25\text{ cm}^2$

$\Rightarrow \overline{MS} = 9{,}39\text{ cm}$ (bzw. $\overline{MS} = -9{,}39\text{ cm}$)

b) Der Punkt N ∈ [MS] ist der Mittelpunkt der Strecke [EF] mit E ∈ [BS] und F ∈ [DS]. Dabei gilt: [EF] || [BD] und $\overline{SN} = 5$ cm .

Zeichne die Strecke [EF] in das Schrägbild zu a) ein und berechne die Länge der Strecke [EF] auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

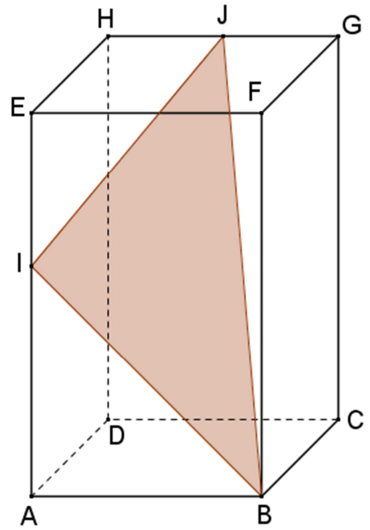
[Ergebnis aus Teilaufgabe a): $\overline{MS} = 9{,}39$ cm]

$$\frac{\overline{SM}}{\overline{SN}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{EF}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9{,}39\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{6\text{ cm}}{\overline{EF}} \Leftrightarrow 9{,}39\text{ cm} \cdot \overline{EF} = 30\text{ cm}^2 \Leftrightarrow \overline{EF} = 3{,}19\text{ cm}$$

Lösung: $\overline{EF} = 3{,}19$ cm

❹ Berechne die Seitenlängen des Dreiecks IBJ. Zeige anschließend rechnerisch, dass dieses Dreieck <u>nicht</u> rechtwinklig ist.



$\overline{AB} = 6$ cm

$\overline{BC} = 4$ cm $\qquad \overline{GJ} = 3$ cm

$\overline{BF} = 10$ cm $\qquad \overline{EI} = 4$ cm

$\overline{BI}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AI}^2$

$\Rightarrow \overline{BI} = \sqrt{(6\text{ cm})^2 + (10\text{ cm} - 4\text{ cm})^2}$

$\Leftrightarrow \overline{BI} = \sqrt{36\text{ cm}^2 + 36\text{ cm}^2}$

$\Leftrightarrow \overline{BI} = \sqrt{72\text{ cm}^2}$

$\Leftrightarrow \overline{BI} = 8{,}49$ cm

$\overline{BJ} = \sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{FG}^2 + \overline{GJ}^2}$

Vgl. Formelsammlung:

Länge der Raumdiagonalen d eines Quaders:

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

(gilt für einen Quader mit den Standardbezeichnungen (Länge a, Breite b, Höhe c))

$\Leftrightarrow \overline{BJ} = \sqrt{(10\text{ cm})^2 + (4\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2}$

$\Leftrightarrow \overline{BJ} = \sqrt{125\text{ cm}^2}$

$\Leftrightarrow \overline{BJ} = 11{,}18$ cm

$\overline{IJ} = \sqrt{\overline{EI}^2 + \overline{EH}^2 + \overline{HJ}^2}$

$\Rightarrow \overline{IJ} = \sqrt{(4\text{ cm})^2 + (4\text{ cm})^2 + (6\text{ cm} - 3\text{ cm})^2}$

$\Leftrightarrow \overline{IJ} = \sqrt{16\text{ cm}^2 + 16\text{ cm}^2 + 9\text{ cm}^2}$

$\Leftrightarrow \overline{IJ} = \sqrt{41\text{ cm}^2}$

$\Leftrightarrow \overline{IJ} = 6{,}40$ cm

Dreieck rechtwinklig?

Dann müsste gelten: $\overline{BI}^2 + \overline{IJ}^2 = \overline{BJ}^2$

$(8{,}49\text{ cm})^2 + (6{,}40\text{ cm})^2 = (11{,}18\text{ cm})^2$?

$113{,}04\text{ cm}^2 \neq 124{,}99\text{ cm}^2$

$\Rightarrow$ Das Dreieck IBJ ist nicht rechtwinklig.

Lösungen: (exakt, nicht gerundet) $\overline{BI} = 6\sqrt{2}$ cm • $\overline{IJ} = \sqrt{41}$ cm • $\overline{BJ} = 5\sqrt{5}$ cm