Nachholschulaufgabe 9d:

Freitag 22.05.20 5. Stunde

Stoff wie schon vorbereitet!

Keine neuen Themen aus dem Homeschooling! (vgl. Anhang)

Ich empfehle euch diese Aufgaben nochmal zu wiederholen!

Themen der 2. Schulaufgabe Klasse 9d 2019/20

Donnerstag, 05.03.2020

Grundwissen

Geraden in Koordinatensystem einzeichnen und Geradengleichung ablesen und aufstellen können. Fehlende Koordinaten von Punkten berechnen.

Flächen

Flächenberechnungen

Parallelogramm; Dreieck; Drachenviereck; Raute; Trapez;

Im Koordinatensystem:
- **Seite parallel zu einer Achse**
- **Flächendeterminate**

(Beachte, dass Höhen auch außerhalb der Fläche liegen können!!!)

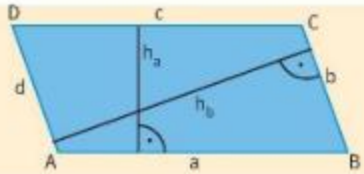
Funktionale Abhängigkeiten

Flächendeterminate: siehe Arbeitsblätter

Gleichungssysteme

Gleichsetzverfahren
Einsetzverfahren
Additionsverfahren

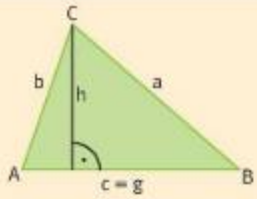
Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme



Für den **Flächeninhalt** eines **Parallelogramms** gilt:

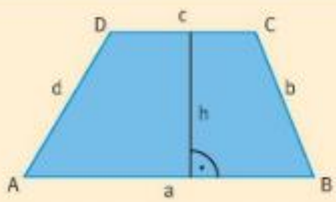
$A_P = g \cdot h$ oder

$A_P = a \cdot h_a$ oder $A_P = b \cdot h_b$



Für den **Flächeninhalt eines Dreiecks** gilt:

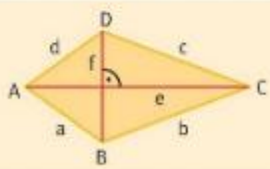
$A_D = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$



Für den **Flächeninhalt eines Trapezes** gilt:

$A_{Tr} = \frac{a + c}{2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$

a und c sind dabei die parallelen Seiten („Grundseiten") des Trapezes.



Für den **Flächeninhalt eines Drachens** gilt:

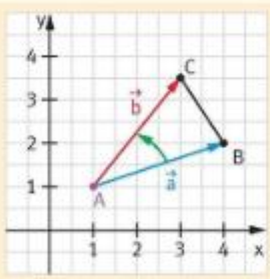
$A_{Dr} = \frac{1}{2} e \cdot f$

Ein Rechteck ist drei Mal so lang wie breit.
$l = 3 \cdot b$

Geradengleichung:
$y = 2x + 3$

Lässt sich eine Größe durch eine andere ausdrücken, so spricht man von einer **funktionalen Abhängigkeit**.
Bei einer Funktion ist der **Funktionswert y** vom Wert der **Variable x abhängig**.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$



$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2{,}5 \end{vmatrix} FE = \frac{1}{2} \, (3 \cdot 2{,}5 - 1 \cdot 2) \, FE$

$= \frac{1}{2} \cdot (7{,}5 - 2) \, FE = 2{,}75 \, FE$

Zwei Vektoren $a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ **spannen eindeutig ein Dreieck** auf.

Für den Flächeninhalt eines solchen Dreiecks gilt:

$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} FE = \frac{1}{2} \cdot (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \, FE$

$A\,(-2 \mid -2{,}5)$; $B\,(2 \mid -0{,}5)$; $C_n\,(x \mid -x + 3)$

Flächeninhalt des Dreiecks ABC_n:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ -x + 5{,}5 \end{pmatrix}$

$A\,(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & x + 2 \\ 2 & -x + 5{,}5 \end{vmatrix} FE = \ldots = (-3x + 9) \, FE$

Mithilfe von **Punktkoordinaten, Vektoren und Determinanten** können Aufgaben zu **funktionalen Abhängigkeiten** im Koordinatensystem bearbeitet werden.

❶ Sicher hast du dir schon bei der Bearbeitung der Aufgaben ❶ und ❷ im letzten Kapitel gedacht: „Ist das anstrengend und langwierig! Kann man den Flächeninhalt von Figuren im Koordinatensystem nicht auch schneller berechnen?" Ja! Es gibt tatsächlich noch eine weitere, viel effizientere Methode (die leider nur im Koordinatensystem funktioniert ☹). Mit Hilfe von Vektoren und der so genannten Determinante ist die Flächenberechnung im Koordinatensystem relativ simpel. Vorher solltest du dich noch mit dem „Werkzeug" Determinante ein wenig vertraut machen und zur Übung den Wert einiger Determinanten berechnen:

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$

(Vgl. Schulheft/-buch oder Formelsammlung!)

a) $\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = 18 - 10 = 8$

b) $\begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 9 & 11 \end{vmatrix} =$ ....

c) $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$ ....

d) $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} =$ ....

e) $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} =$ ....

f) $\begin{vmatrix} x & 11 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$ ....

g) $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ a & 1 \end{vmatrix} =$ ....

h) $\begin{vmatrix} 5x & 3 \\ x & 2 \end{vmatrix} =$ ....

i) $\begin{vmatrix} 5x & -3 \\ x & -2 \end{vmatrix} =$ ....

j) $\begin{vmatrix} x & 3 \\ (x+2) & 4 \end{vmatrix} =$ ....

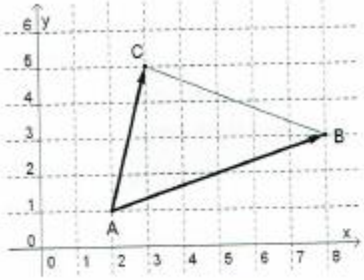
k) $\begin{vmatrix} -4x & 5 \\ -5 & x \end{vmatrix} =$ ....

l) $\begin{vmatrix} (x+1) & 0 \\ 3 & (x-1) \end{vmatrix} =$ ....

Lösungen: $7x$ • 38 • $3x-22$ • 6 • $-7x$ • 0 • $-4x^2+25$ • 8 • $x-6$ • $-2-2a$ • -30 • x^2-1

❷ Berechne den Flächeninhalt der folgenden Dreiecke mit Hilfe von Vektoren.

a) A(2|1), B(8|3), C(3|5).



$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 - 2 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} \dots - \dots \\ \dots - \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

Vom Vektor einen schönen Gruß: „Spitze minus Fuß!"

$\Rightarrow A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$ FE

= ....

= ....

= ....

= ....

Beachte:

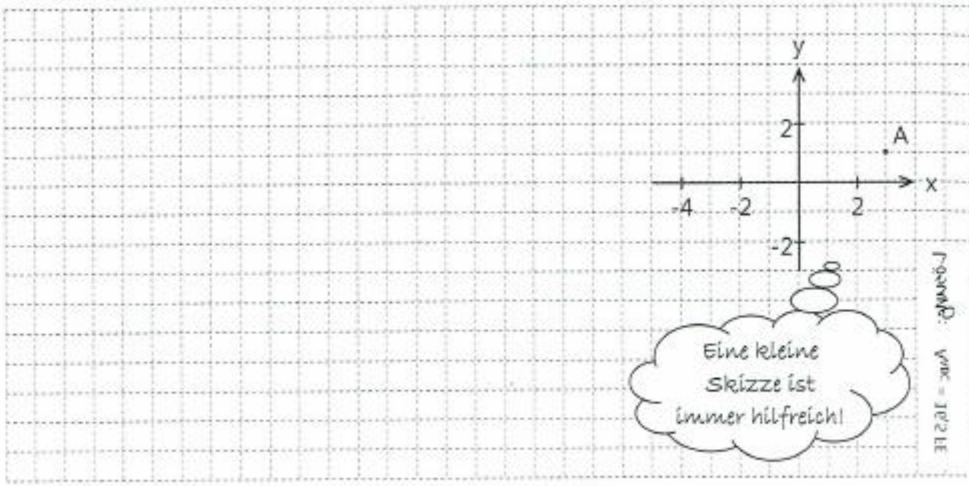
1) Die beiden Vektoren, die das Dreieck aufspannen, müssen denselben Fußpunkt haben, d.h. sie müssen vom gleichen Eckpunkt aus „starten".

2) Die Reihenfolge, in der du die Vektorkoordinaten in die Determinante einträgst, ist wichtig!
Trage in die erste Spalte der Determinante die Koordinaten desjenigen Vektors ein, der die Fläche entgegen dem Uhrzeigersinn überstreicht.

b) A(1|3), B(5|1), C(4|6)

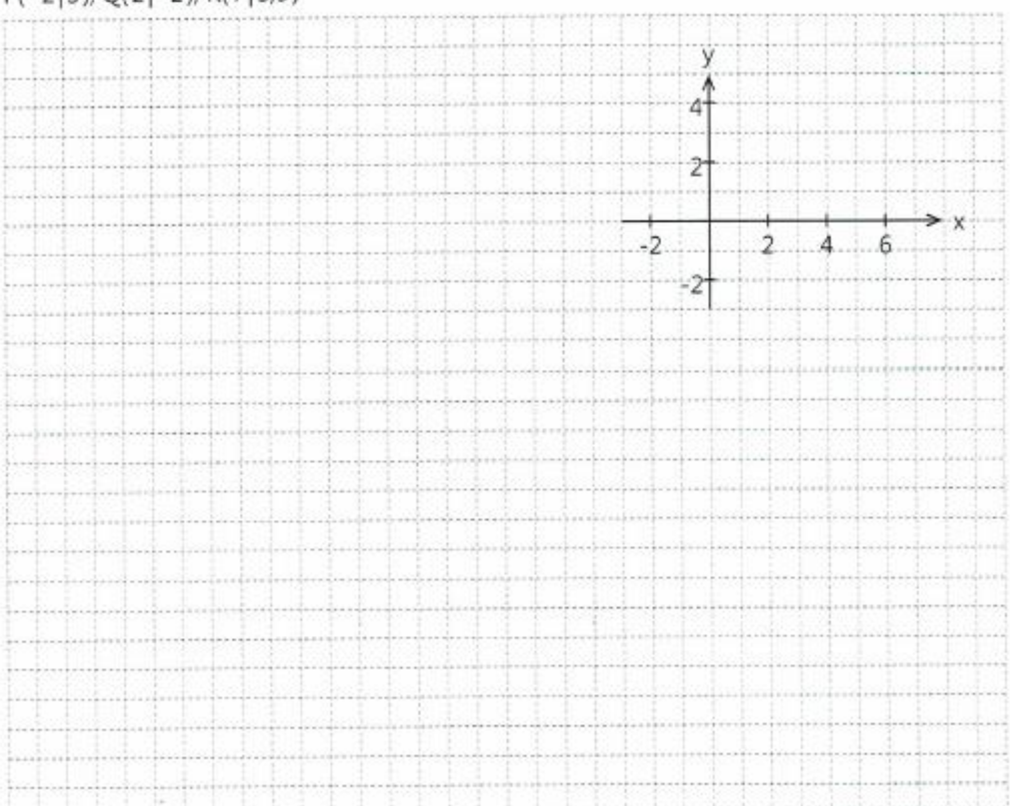
Lösung: ❷ a) Vgl. Aufgabe ❶ aus Kap. 2.3! b) $A_{ABC} = 9$ FE

c) A(3|1), B(−4|3), C(−3|−2)

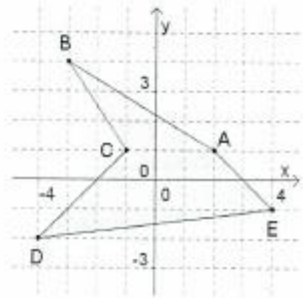


❸ Berechne zweimal den Flächeninhalt des Dreiecks PQR mit Hilfe von Vektoren. Nimm beim ersten Mal den Punkt P als Fußpunkt der beiden Vektoren, beim zweiten Mal den Punkt R. Es muss beide Male dasselbe Ergebnis heraus kommen!

P(−2|3), Q(2|−2), R(7|3,5)



❹ Zerlege die rechts abgebildete Figur in Dreiecke und berechne anschließend mit Hilfe von Vektoren und der Determinante ihren Flächeninhalt.



A(2|1), B(−3|4), C(−1|1), D(−4|−2), E(4|−1)

Lösung: $A_{Figur} = 18$ LE

Du kennst nun also schon 2 Möglichkeiten, wie man den Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet:

1. über die Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

2. Mithilfe von Vektoren und der Determinante: $A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}$

<u>Beachte:</u> Das Verfahren mithilfe von Vektoren und der Determinante ist nur im Koordinatensystem möglich - wie solltest du sonst die Koordinaten der Vektoren berechnen?!? Keine Vektoren ⇒ keine Determinante!

Das wird gerne vergessen!

Aufgaben zu funktionaler Abhängigkeit
im Koordinatensystem

1.0 Gegeben sind die Punkte A(-2 | 5) und B(4 | -1). Punkte C_n liegen auf der Geraden g mit $y = 0{,}5x + 1{,}5$. Dadurch entstehen Dreiecke ABC_n.

1.1 Zeichne A, B, g sowie die Dreiecke ABC_1 mit $C_1(5 | y_1)$ und ABC_2 mit $C_2(-2 | y_2)$ in ein Koordinatensystem.
(Für die Zeichnung: $-5 \le x \le 6$; $-2 \le y \le 6$)

1.2 Stelle den Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit von x dar.
[Ergebnis: $A(x) = (4{,}5x - 4{,}5)$ FE]

1.3 Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke ABC_1 und ABC_2.

1.4 Für welche x sind die Dreiecke ABC_n positiv, für welche x negativ orientiert?

1.5 Für welchen Punkt C_3 beträgt der Flächeninhalt 22,5 FE ?

2.0 Gegeben sind die Punkte A(-1 | -3) und C(-4 | 5). Punkte B_n liegen auf der Geraden g mit $y = 0{,}5x + 3$. Dadurch entstehen Dreiecke AB_nC.

2.1 Zeichne A, C, g sowie die Dreiecke AB_1C mit $B_1(0 | y_1)$ und AB_2C mit $B_2(3 | y_2)$ in ein Koordinatensystem.
(Für die Zeichnung: $-6 \le x \le 6$; $-4 \le y \le 6$)

2.2 Stelle den Flächeninhalt der Dreiecke AB_nC in Abhängigkeit von x dar.
[Ergebnis: $A(x) = (4{,}75x + 13)$ FE]

2.3 Für welchen Punkt B_3 beträgt der Flächeninhalt 22,5 FE ?

2.4 Für welche x sind die Dreiecke AB_nC negativ orientiert?

3. Gegeben sind die Punkte A(-4 | 1) und B(2 | -3). Punkte C_n liegen auf der Geraden g mit $y = -\frac{1}{3}x + 4$. Dadurch entstehen Dreiecke ABC_n. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC_0 sei 15,5 FE. Ermittle rechnerisch die Koordinaten des Punktes C_0.

4. Ein Parallelogramm ABCD mit A(2 | 2), B(x_B | 4) und C(10 | 8) hat einen Flächeninhalt von 38 FE. Ermittle rechnerisch x_B sowie die Koordinaten des Eckpunktes D.

Lösungen dazu habt ihr bekommen!