Hefteintrag✏

Verknüpfung von Abbildungen

Merkwissen

Eine **Nacheinanderausführung von** zwei (oder mehr) **Abbildungen** wird als **Verknüpfung** von Abbildungen bezeichnet. In manchen Fällen lässt sich eine verknüpfte Darstellung in Matrixform finden.

Beispiel:

$P\,(x\,|\,y) \xmapsto{O\,(0|0);\,\alpha} P'\,(x'\,|\,y') \xmapsto{O\,(0|0);\,k} P''\,(x''\,|\,y'')$ $\qquad \mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ \alpha \in [0°;\, 360°[;\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \underbrace{k \cdot \Bigg[\overbrace{\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}}^{\text{Drehung}} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Bigg]}_{\text{Zentrische Streckung}}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y \\ \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot \cos\alpha \cdot x - k \cdot \sin\alpha \cdot y \\ k \cdot \sin\alpha \cdot x + k \cdot \cos\alpha \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} k \cdot \cos\alpha & k \cdot (-\sin\alpha) \\ k \cdot \sin\alpha & k \cdot \cos\alpha \end{pmatrix}}_{\textbf{Verknüpfte Darstellung}} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Beispiele

I Der Punkt P (x|y) wird durch die Nacheinanderausführung einer Achsenspiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten und einer Achsenspiegelung an der x-Achse (bzw. umgekehrt) auf den Punkt P' (x'|y') abgebildet ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Berechne die Koordinaten von P'.

Lösung:

$P\,(x|y) \xmapsto{y=x} P^*\,(x^*|y^*) \xmapsto{y=0} P'(x'|y')$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow P'\,(y\,|-x)$

$P\,(x|y) \xmapsto{y=0} P^*\,(x^*|y^*) \xmapsto{y=x} P'(x'|y')$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow P'\,(-y\,|\,x)$

*Vertauscht man die **Reihenfolge** der Verknüpfung, so ergibt sich im Allgemeinen eine andere Abbildung.*

Kilian

1 Der Punkt P wird durch die Nacheinanderausführung einer Drehung und einer zentrischen Streckung auf den Punkt P' abgebildet. Stelle die Verknüpfung beider Abbildungen in Matrixform dar und berechne die Koordinaten von P'.

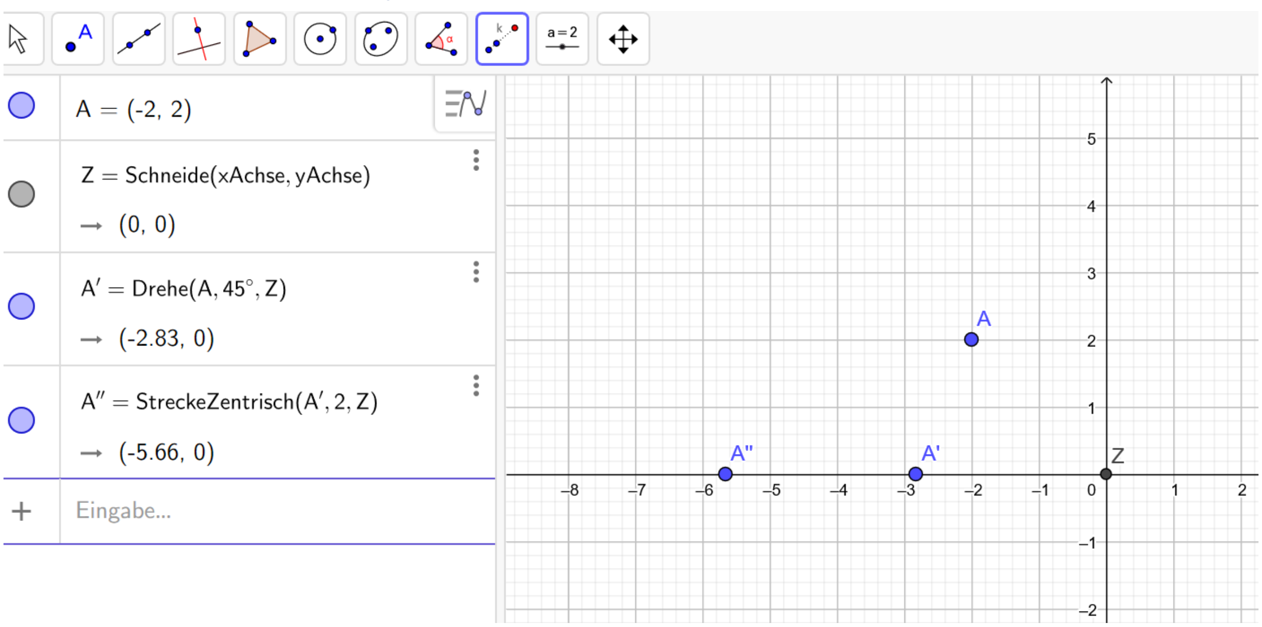
a) P (−2 | 2); $P \xmapsto{Z\,(0|0);\ \alpha = 45°} P^*$; $P^* \xmapsto{Z\,(0|0);\ k = 2} P'$

b) P (1 | 3); $P \xmapsto{Z\,(0|0);\ \alpha = 90°} P^*$; $P^* \xmapsto{Z\,(0|0);\ k = 1{,}5} P'$

Martin

2 Das Dreieck ABC mit A (1 | −2), B (6 | −3) und C (3 | 0) wird durch eine Drehung um den Ursprung O (0 | 0) mit dem Winkelmaß $\alpha = 60°$ auf das Dreieck A'B'C' abgebildet, dieses wird durch eine zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum O (0 | 0) und dem Streckungsfaktor $k = \sqrt{2}$ auf das Dreieck A''B''C'' abgebildet ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Führe die Abbildungen zeichnerisch durch und berechne sodann die Koordinaten der Punkte A'', B'' und C''.

Gerne erst mal mit Geogebra1a)



…dann könnt ihr vergleichen ob ihr schriftlich aufs gleiche Ergebnis kommt.

Grüße …Christiane Guggenberger

Meldet euch wenn ihr nicht klar kommt.