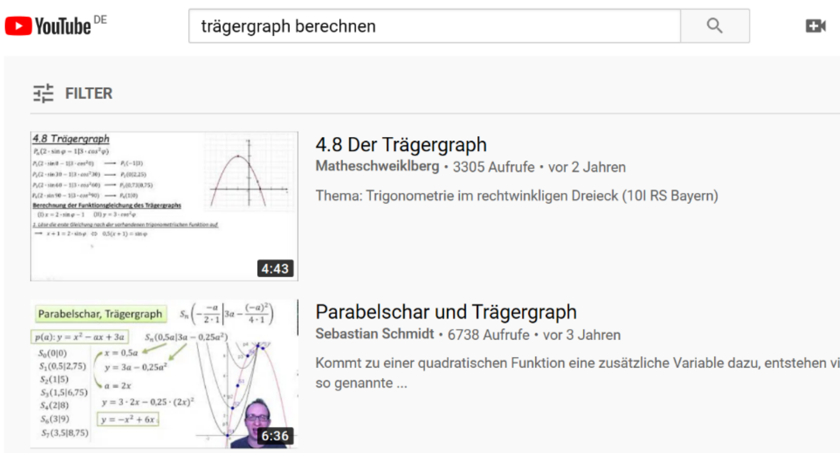
Parallelverschiebung und zentrische Streckung

(nächste Woche dann orthogonale Affinität)

...sind nicht so schwer, da man sie nicht mit der Matrixform macht



Einige Hatten Schwierigkeiten beim Trägergraphen

Hefteintag

Parallelverschiebung

Wird bei einer Parallelverschiebung mit dem **Verschiebungsvektor** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ der (Ur-)Punkt $P(x\,|\,y)$ auf den Bildpunkt $P'(x'\,|\,y')$ abgebildet, so schreibt man:

$$P(x\,|\,y) \xmapsto{\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}} P'(x'\,|\,y') \quad \text{wobei gilt: } \overrightarrow{PP'} = \vec{v}$$

- **Abbildungsgleichung der Parallelverschiebung mit $\vec{v}$:**

$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} \oplus \vec{v}$ — Vektorkette

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ — Vektorform

$\left| \begin{array}{l} x' = x + v_x \\ \wedge\; y' = y + v_y \end{array} \right.$ — Koordinatenform

1. Die Gerade g mit $y = \frac{1}{2}x + 3$ wird durch Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ auf die Bildgerade g' abgebildet. Berechne die Gleichung der Bildgeraden g'.

Musterlösung übernächste Seite

Hefteintag

Zentrische Streckung

Wird bei einer zentrischen Streckung mit dem **Streckungszentrum Z** und dem **Streckungsfaktor k** ($k \neq 0$) der (Ur-)Punkt $P(x \mid y)$ auf den Bildpunkt $P'(x' \mid y')$ abgebildet, so schreibt man:

$P(x \mid y) \xmapsto{Z;\,k} P'(x' \mid y')$

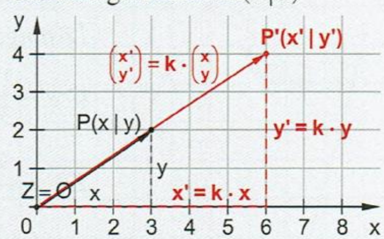
- **Abbildungsgleichung der zentrischen Streckung:**

$\overline{ZP} \xmapsto{Z(x_Z \mid y_Z);\,k} \overline{ZP}' = k \cdot \overline{ZP}$

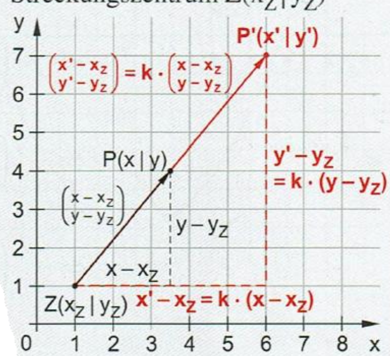
$\begin{pmatrix} x' - x_Z \\ y' - y_Z \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x - x_Z \\ y - y_Z \end{pmatrix}$ **Vektorform**

$\left| \begin{array}{l} x' - x_Z = kx - kx_Z \\ \wedge \;\; y' - y_Z = ky - ky_Z \end{array} \right.$ **Koordinatenform**

Streckungszentrum $Z(0 \mid 0)$



Streckungszentrum $Z(x_Z \mid y_Z)$



2. Die Parabel p mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}x^2 - 5$ wird durch zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum $Z(2 \mid 1)$ und dem Streckungsfaktor $k = -\frac{3}{2}$ abgebildet. Bestimme die Gleichung der Bildparabel p'.

Lösungen

Lösung:

$$g\colon y=\frac{1}{2}x+3 \xmapsto{\vec{v}=\binom{5}{-4}} g'$$

$$P\left(x \,\middle|\, \frac{1}{2}x+3\right) \xmapsto{\vec{v}=\binom{5}{-4}} P'(x'|y')$$

Abbildung eines allgemeinen Punktes $P \in g$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\\frac{1}{2}x+3\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$$

Einsetzen der Koordinaten von $P\left(x\,\middle|\,\frac{1}{2}x+3\right)$ in die Abbildungsgleichung der Parallelverschiebung in Vektorform

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+5\\\frac{1}{2}x+3-4\end{pmatrix}$$

Zusammenfassen

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+5\\\frac{1}{2}x-1\end{pmatrix}$$

Übergang von der Vektorform zur Koordinatenform

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x'=x+5 \quad \Big| -5 \\ \wedge\ y'=\frac{1}{2}x-1 \end{array}\right.$$

Gleichung I nach x auflösen

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=x'-5 \\ \wedge\ y'=\frac{1}{2}x-1 \end{array}\right.$$

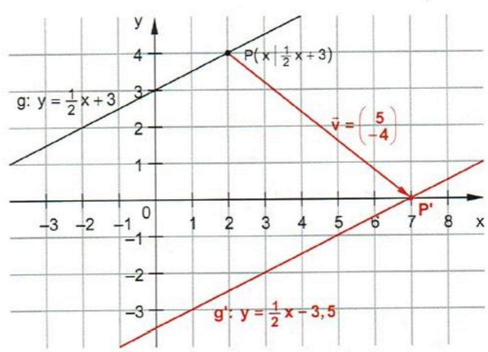
Ersetze den Parameter x durch den Term $x'-5$ in Gleichung II.

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=x'-5 \\ \wedge\ y'=\frac{1}{2}(x'-5)-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=x'-5 \\ \wedge\ y'=\frac{1}{2}x'-\frac{5}{2}-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=x'-5 \\ \wedge\ y'=\frac{1}{2}x'-3\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

also: $g'\colon y=\frac{1}{2}x-3\frac{1}{2}$



Lösung:

$$p\colon\ y=\frac{1}{3}x^2-5 \xmapsto{Z(2|1);\ k=-\frac{3}{2}} p'$$

Das Zentrum Z liegt nicht im Ursprung.

$$\overrightarrow{ZP'} \xmapsto{Z(2|1);\ k=-\frac{3}{2}} \overrightarrow{ZP} \text{ mit } P'(x'|y')$$

$$\begin{pmatrix} x'-x_Z \\ y'-y_Z \end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix} x-x_Z \\ y-y_Z \end{pmatrix}$$

Abbildungsgleichung der zentrischen Streckung in Vektorform

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\cdot\begin{pmatrix} x-2 \\ \frac{1}{3}x^2-5-1 \end{pmatrix}$$

Einsetzen der allgemeinen Koordinaten des Urpunktes $P\left(x\,\middle|\,\frac{1}{3}x^2-5\right)$ und der Koordinaten des Zentrums Z(2 | 1) in die Abbildungsgleichung

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\cdot\begin{pmatrix} x-2 \\ \frac{1}{3}x^2-6 \end{pmatrix}$$

Multipliziere mit dem Streckungsfaktor $k=-\frac{3}{2}$.

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\cdot(x-2) \\ -\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}x^2-6\right) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}x+3 \\ -\frac{1}{2}x^2+9 \end{pmatrix}$$

Gehe zur Koordinatenform über.

$$\Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{ll} x'-2=-\frac{3}{2}x+3 & |-3 \\ \wedge\ \ y'-1=-\frac{1}{2}x^2+9 & |+1 \end{array}\right.$$

Gleichung I nach x auflösen

Gleichung II nach y' auflösen

$$\Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{ll} x'-5=-\frac{3}{2}x & \left|\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\right. \\ \wedge\ \ y'=-\frac{1}{2}x^2+10 & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} x=-\frac{2}{3}x'+\frac{10}{3} \\ \wedge\ \ y'=-\frac{1}{2}x^2+10 \end{array}\right.$$

Setze $-\frac{2}{3}x'+\frac{10}{3}$ für x in Gleichung II ein.

$$\Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} x=-\frac{2}{3}x'+\frac{10}{3} \\ \wedge\ \ y'=-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}x'+\frac{10}{3}\right)^2+10 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} x=-\frac{2}{3}x'+\frac{10}{3} \\ \wedge\ \ y'=-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}x'^2-\frac{40}{9}x'+\frac{100}{9}\right)+10 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} x=-\frac{2}{3}x'+\frac{10}{3} \\ \wedge\ \ y'=-\frac{2}{9}x'^2+\frac{20}{9}x'-\frac{50}{9}+10 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} x=-\frac{2}{3}x'+\frac{10}{3} \\ \wedge\ \ y'=-\frac{2}{9}x'^2+2\frac{2}{9}x'+4\frac{4}{9} \end{array}\right.$$

also: $p'\colon\ y=-\frac{2}{9}x^2+2\frac{2}{9}x+4\frac{4}{9}$