Hier auf den nächsten zwei Seiten noch ein ausführlich gelöstes Beispiel:

Funktionale Abhängigkeiten – Veränderung von ebenen Figuren

Merke

Befindet sich ein Punkt auf einer Ortslinie (z. B. einer Geraden), so sind seine Koordinaten **durch die Funktionsgleichung** der Ortslinie **festgelegt**.

Beispiel

Die Punkte C_n liegen auf der Geraden g: $y = 2x + 1$.
Die Koordinaten aller Punkte C_n auf der Geraden g lassen sich angeben: $C_n(x\,|\,2x+1)$
Der Index n besagt, dass es unendlich viele solcher Punkte gibt.
Mithilfe dieser allgemeinen Koordinaten der Punkte C_n lassen sich Veränderungen von Flächeninhalten, Streckenlängen usw. in Abhängigkeit von der Lage der Punkte C_n berechnen.

Flächenberechnung im Koordinatensystem mit Determinante

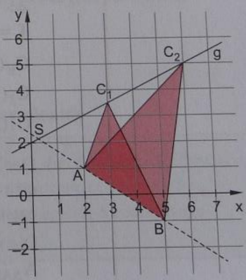
Beispiel

Gegeben sind die Punkte $A(2\,|\,1)$ und $B(5\,|\,-1)$ sowie die Gerade g: $y = 0{,}5x + 2$.
A und B sind Eckpunkte von Dreiecken ABC_n, wobei die Punkte C_n auf der Geraden g liegen.

a) Zeichne die Gerade g und das Dreieck ABC_1 mit $C_1(3\,|\,?)$ sowie das Dreieck ABC_2 für $C_2(6\,|\,?)$.
b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC_1.
c) Stelle den Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n in Abhängigkeit der x-Koordinate (Abszisse) des Punktes C_n dar.
d) Berechne die Koordinaten des Eckpunktes C_3 des Dreiecks ABC_3 mit Flächeninhalt 8,25 FE.
e) Für welche x-Koordinaten entstehen Dreiecke ABC_n?

Lösung:

a) • Zeichnen der Geraden g
• Einzeichnen des Punktes C_1 mit x-Koordinate 3 auf der Geraden g
• Zeichnen des Dreiecks ABC_1
• Gleiches Verfahren für das Dreieck ABC_2



b) Koordinaten von C_1:

$C_1(\mathbf{3}\,|\,?) \in g$: $y = 0{,}5 \cdot \mathbf{3} + 2$
$\Leftrightarrow\quad y = 3{,}5$

$C_1(3\,|\,3{,}5)$

Aufspannende Vektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 3{,}5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

Flächeninhalt mit Determinante:

$$A_{\Delta ABC_1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2{,}5 \end{vmatrix} \text{ FE} = \frac{1}{2} \cdot [3 \cdot 2{,}5 - (-2) \cdot 1] \text{ FE} = 4{,}75 \text{ FE}$$

c) Die Punkte C_n auf der Geraden g besitzen folgende Koordinaten in Abhängigkeit von x:

g: $y = 0{,}5x + 2 \;\Rightarrow\; C_n(x \mid 0{,}5x + 2)$

Die y-Koordinate der Punkte C_n ist festgelegt durch die Geradengleichung g: $y = 0{,}5x + 2$. Man rechnet wie in Teilaufgabe b.

Aufspannende Vektoren:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 0{,}5x+2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 0{,}5x+1 \end{pmatrix}$

„Spitze minus Fuß" mit $C_n(x \mid 0{,}5x + 2)$. Anstelle der speziellen Koordinaten eines Punktes C verwendet man die allgemeinen Koordinaten der Punkte C_n.

Flächeninhalt in Abhängigkeit von x mit Determinante:

$A_{\Delta ABC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & x-2 \\ -2 & 0{,}5x+1 \end{vmatrix}$ FE

$A_{\Delta ABC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot [3 \cdot (0{,}5x+1) - (-2) \cdot (x-2)]$ FE — Vorzeichen beim Ausmultiplizieren beachten

$A_{\Delta ABC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot [1{,}5x + 3 + 2x - 4]$ FE — Umkehrung der Vorzeichen

$A_{\Delta ABC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot (3{,}5x - 1)$ FE

d)

$$\begin{array}{|l} A(x) = \frac{1}{2} \cdot (3{,}5x - 1) \text{ FE} \\ \wedge \; A(x) = 8{,}25 \text{ FE} \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (3{,}5x - 1) = 8{,}25 \quad (\mathrm{I} = \mathrm{II}) \quad | \cdot 2$ — Auflösen nach x

$\Leftrightarrow \quad 3{,}5x - 1 = 16{,}5 \quad | +1$

$\Leftrightarrow \quad 3{,}5x = 17{,}5 \quad | : 3{,}5$

$\Leftrightarrow \quad x = 5$ — Die x-Koordinate des Punktes C_3 ist 5.

$\mathbb{L} = \{5\}$

$C_n(x \mid 0{,}5x + 2)$ — $x = 5$ einsetzen

$C_3(5 \mid 0{,}5 \cdot 5 + 2)$

$C_3(5 \mid 4{,}5)$

e) Der Punkt C_n darf nur bis zum Schnittpunkt S wandern, denn links von S ändert sich der Umlaufsinn der Dreiecke in AC_nB. Fällt der Punkt C_n auf den Punkt S, so entsteht kein Dreieck, sondern eine Strecke.

Die x-Koordinate des Punktes S lässt sich aus dem Term für den Flächeninhalt $A_{\Delta ABC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot (3{,}5x - 1)$ FE berechnen:

$A_{\Delta ABC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot (3{,}5x - 1)$ FE

$\downarrow$

Setze: $0 = \frac{1}{2} \cdot (3{,}5x - 1)$

Wandert der Punkt C_n in Richtung S, wird der Flächeninhalt der Dreiecke immer kleiner. Für $C_n = S$ ist der Flächeninhalt schließlich gleich 0.

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{7}$ — Die x-Koordinate des Punktes S ist $\frac{2}{7}$.

$\mathbb{L} = \left\{\frac{2}{7}\right\}$

Zulässige x-Werte für Dreiecke ABC_n: $x > \frac{2}{7}$ — Für x-Werte rechts von S entstehen Dreiecke ABC_n.

Bitte arbeitet obiges Beispiel durch und löst folgende Aufgaben 93 und 94:

93 Die Eckpunkte D_n von Parallelogrammen ABC_nD_n mit $A(1|1)$ und $B(4|1)$ liegen auf der Geraden g: $y = x + 3$.

a) Zeichne das Parallelogramm ABC_1D_1 für $D_1(2|?)$ und das Parallelogramm ABC_2D_2 für $D_2(3|?)$ und berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms ABC_1D_1.

b) Berechne den Flächeninhalt der Parallelogramme in Abhängigkeit von der x-Koordinate der Punkte D_n.

c) Berechne die Koordinaten des Punktes D_3, sodass ein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 10 FE entsteht.

d) Für welche x-Werte existieren Parallelogramme ABC_nD_n?

94 Die Punkte $A(1|1)$ und $B_n(x|x+2)$ sind Eckpunkte von Dreiecken AB_nC_n, wobei $\overrightarrow{B_nC_n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Zeichne die Dreiecke AB_1C_1 für $x = 3$ und AB_2C_2 für $x = 5$ ein.

b) Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke AB_nC_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B.

c) Für welchen x-Wert erhält man ein Dreieck mit 4 FE Flächeninhalt?

d) **Schwer:** Für welche x-Werte existieren Dreiecke AB_nC_n? Löse zeichnerisch und rechnerisch.

95 Die Punkte $A(1|4)$, $C(1|0)$ und $B_n(x|-x+1)$ legen Drachenvierecke AB_nCD_n mit Symmetrieachse AC fest.

a) Zeichne das Drachenviereck AB_1CD_1 für $x = -1$ und das Drachenviereck AB_2CD_2 für $x = -2$ ein.

b) Berechne den Flächeninhalt des Drachenvierecks AB_1CD_1.