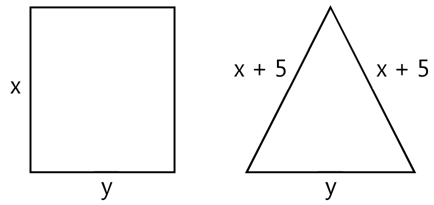
3.7 Lineare Gleichungssysteme und Geometrie?!

→ Geometrische Probleme über den Ansatz eines passenden Gleichungssystems lösen

Gleichungssysteme sind eigentlich ein Thema aus der Rubrik »Algebra«. Dennoch kann man damit auch geometrischen Problemen zu Leibe rücken:

❶ Das abgebildete Rechteck und das gleichschenklige Dreieck besitzen jeweils denselben Umfang, nämlich 30 cm. Ansonsten wissen wir nur, dass die beiden Schenkel des Dreiecks jeweils um 5 cm länger sind als eine Seite des Rechtecks, und die Basis des Dreiecks genau so lang ist wie die andere Seite des Rechtecks.



Wie lang sind die Seiten des Rechtecks/Dreiecks?

Umfang des Rechtecks: $u_R = x + y + x + y$
$= 2x + 2y$

Umfang des Dreiecks: $u_D = (x + 5) + (x + 5) + y$
$= x + 5 + x + 5 + y$
$= 2x + 10 + y$

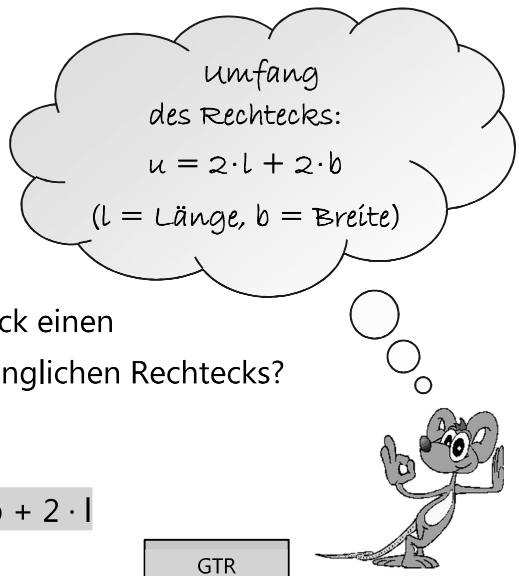
Die beiden Figuren besitzen denselben Umfang $\Rightarrow$ $u_R = u_D$ ($\triangleq$ Gleichsetzungsverfahren):

$2x + 2y = 2x + 10 + y \quad | -2x$
$\Leftrightarrow \quad 2y = 10 + y \quad | -y$
$\Leftrightarrow \quad y = 10$

Da der Umfang 30 cm beträgt gilt:

$30 = 2x + 2y$
$\Leftrightarrow \quad 30 = 2x + 2 \cdot 10$
$\Leftrightarrow \quad x = 5$

Mach die Probe!



❷ Ein Rechteck besitzt einen Umfang von 24 cm.
Verkürzt man die eine Seite um 2 cm und verdoppelt die Länge der anderen Seite, dann hat das neue Rechteck einen Umfang von 36 cm. Wie lang sind die Seiten des ursprünglichen Rechtecks?

Breite des ursprünglichen Rechtecks: b
Länge des ursprünglichen Rechtecks: l
$\Rightarrow$ Umfang des ursprünglichen Rechteck: $u_{\text{urspr. R}} = 2 \cdot b + 2 \cdot l$
Laut Angabe ist dieser 24 cm lang $\Rightarrow$ $\boxed{24 = 2 \cdot b + 2 \cdot l}$

GTR benutzen!

Neue Breite des veränderten Rechtecks: $b - 2$
Neue Länge des veränderten Rechtecks: $l \cdot 2$
$\Rightarrow$ Umfang des veränderten Rechtecks: $u_{\text{veränd. R}} = 2 \cdot (b - 2) + 2 \cdot (l \cdot 2)$
$= 2b - 4 + 4l$

Laut Angabe ist dieser 36 cm lang $\Rightarrow$ $\boxed{36 = 2b - 4 + 4l}$

Löse als das Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix} 24 = 2b + 2l \\ \wedge\ 36 = 2b - 4 + 4l \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2b + 2l = 24 \\ \wedge\ 2b - 4 + 4l = 36 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2b + 2l = 24 \\ \wedge\ 2b + 4l = 40 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} b = 8 \\ \wedge\ l = 4 \end{vmatrix}$$

LÖSUNG:
❶ x = 5 cm, y = 10 cm
❷ Maße des ursprünglichen Rechtecks:
l = 4 cm, b = 8 cm

3.8 Sach- und Anwendungsaufgaben

→ Interessante Fragestellungen und realitätsnahe Sachaufgaben mit Hilfe von Gleichungssystemen lösen

❶ Die Schüler der Klasse 9 f wollen wissen, wie alt ihre Lehrkräfte in den Fächern Mathe, Deutsch und Geschichte sind. Die drei Pauker behaupten, sie seien zusammen 107 Jahre alt, wobei zwei von ihnen gleich alt sind. Das Einzige, was die Schüler noch herausgefunden haben, ist, dass der Geschichtslehrer acht Jahre älter ist als seine beiden Kollegen.

Alter der Mathelehrkraft: x
Alter der Deutschlehrkraft: y
Alter der Geschichtslehrkraft: z

Weil die Deutsch- und Mathelehrkraft gleich alt sind, gilt $x = y$.

1. Information („zusammen 107 Jahre…“) ⇒ 1. Gleichung: $x + x + z = 107$
2. Information („Geschichtslehrer acht Jahre älter…“) ⇒ 2. Gleichung: $z = x + 8$

⇒ Gleichungssystem: $\left| \begin{array}{l} 2x + z = 107 \\ \wedge\ z = x + 8 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2x + z = 107 \\ \wedge\ -x + z = 8 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 33 \\ \wedge\ z = 41 \end{array} \right.$

Die Mathe- bzw. Deutschlehrkraft sind 33 Jahre, der Geschichtslehrer 41 Jahre alt.

Lösung: Das Alter der beiden Lehrkräfte, die gleich alt sind, ist eine „Schnapszahl“.

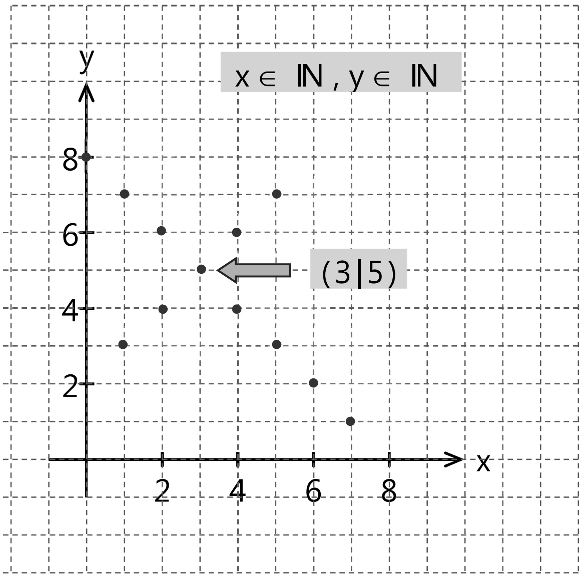
❷ Gesucht sind zwei natürliche Zahlen x und y, deren Summe 8 ergibt. Wenn man y von x subtrahiert, erhält man als Ergebnis −2.

a) Versuche, die korrekten Werte für x und y zu erraten (gar nicht schwer!).
   3 und 5. Denn $3 + 5 = 8$ und $3 - 5 = -2$.

b) Stelle das passende Gleichungssystem zu diesem Rätsel auf.

$$\left| \begin{array}{ll} x + y = 8 & \text{(I)} \\ \wedge\ x - y = -2 & \text{(II)} \end{array} \right.$$

c) Löse dieses Gleichungssystem grafisch und kontrolliere anhand der Zeichnung, ob dein Ergebnis aus Teilaufgabe a) stimmt.



Umformen der Gleichungen („y = …“):

(I) $x + y = 8 \quad | - x$
$\Leftrightarrow y = -x + 8$

(II) $x - y = -2 \quad | + y$
$\Leftrightarrow x = -2 + y \quad | + 2$
$\Leftrightarrow x + 2 = y$
$\Leftrightarrow y = x + 2$

❸ Mario L. und Kevin K. haben in der Bundesliga zusammen 42 Tore geschossen. Hätte Mario drei Tore weniger und Kevin drei Tore mehr geschossen, würden sie in der Torschützenliste denselben Platz belegen. Wie viele Tore hat jeder erzielt?

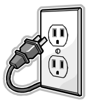
Anzahl der Tore Mario: m
Anzahl der Tore Kevin: k

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} m + k = 42 \\ \wedge\ m - 3 = k + 3 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} m + k = 42 \\ \wedge\ m - k = 6 \end{array} \right.$$

$\mathbb{L} = \{ (24|18) \}$

Mario hat 24 Tore erzielt, Kevin 18
(Probe: 24 − 3 = 21 und 18 + 3 = 21 ✓, zusammen: 24 + 18 = 42 ✓)

❹ **BLUE**Strom bietet seinen Kunden unter anderem die folgenden beiden Strom-Tarife an:



Überland-Plus-Tarif: 19,05 Cent/kWh + jährlich 60 € Grundpreis („Netzpauschale“)
Überland-Basis-Tarif: 16,71 Cent/kWh + monatlich 9,39 € Netzpauschale

Erstelle ein lineares Gleichungssystem, mit Hilfe dessen man berechnen kann, bei welchem jährlichen Stromverbrauch sich bei beiden Tarifen die gleichen Kosten ergeben. Vergiss nicht, den gewählten Variablen die entsprechenden Maßeinheiten zuzuordnen!

Jährliche Kosten in €: y
Verbrauch in kWh: x

In € umrechnen! (19,05 Cent = 0,1905 €)

$\Rightarrow$ Jährliche Kosten Plus-Tarif: $y = 0{,}1905 \cdot x + 60$
Basis-Tarif: $y = 0{,}1671 \cdot x + 12 \cdot 9{,}39$

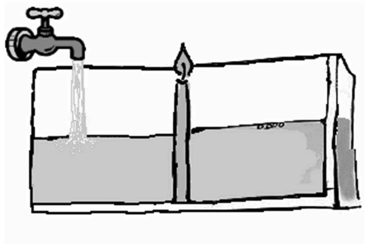
$$\left| \begin{array}{l} y = 0{,}1905x + 60 \\ \wedge\ y = 0{,}1671x + 112{,}68 \end{array} \right.$$

$\mathbb{L} = \{ (2251{,}20|488{,}86) \}$

Bei x = 2251 kWh (gerundet) ergeben sich bei beiden Tarifen Stromkosten in Höhe von y = 489 € (ebenfalls gerundet).

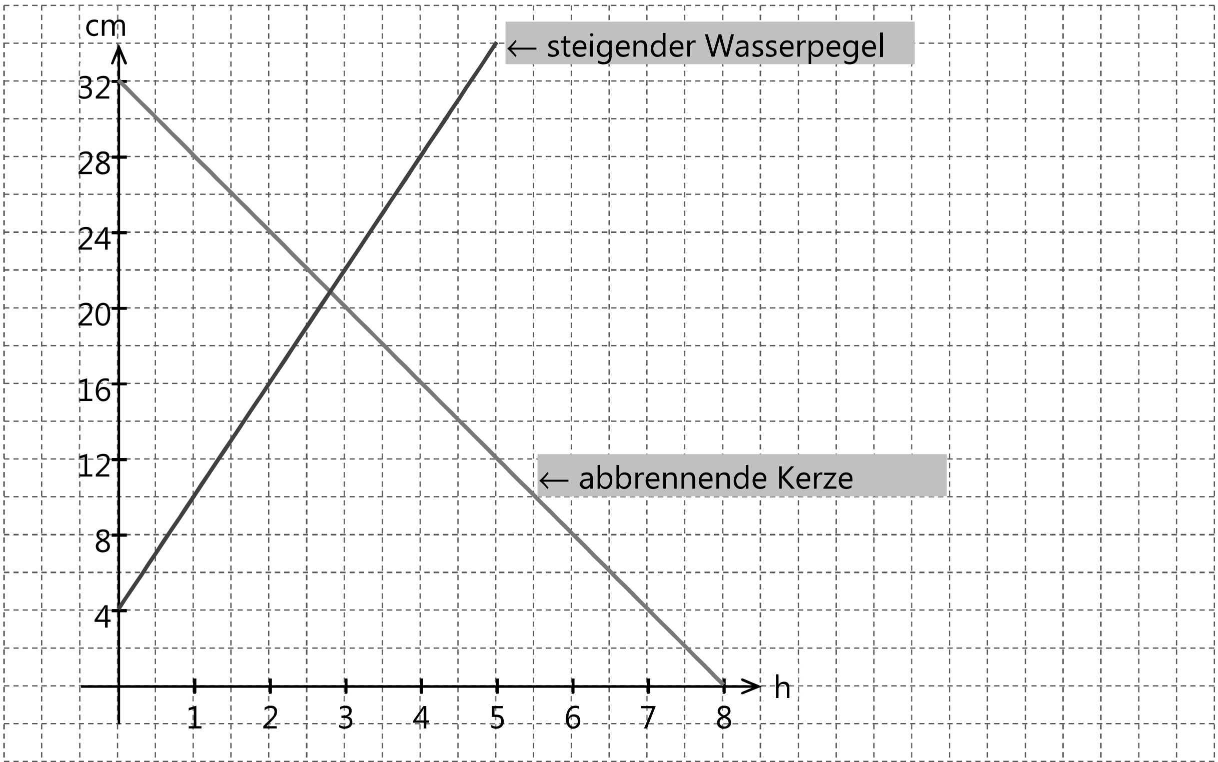
Lösung: ❶ Kevin: 18 Tore, Mario: 24 Tore ❷ Bei 2251 kWh jährlich ergeben sich bei beiden Tarifen dieselben Kosten: 489 € (Ergebnisse auf ganze Zahlen gerundet).

❺ In einem Becken, in dem sich schon ein wenig Wasser befindet, steht eine Kerze. Die Kerze wird angezündet und gleichzeitig läuft gleichmäßig (und ziemlich langsam) Wasser in das Becken. Das Abbrennen der Kerze und das Auffüllen des Beckens lassen sich mathematisch durch folgende Gleichungen beschreiben:



Kerze: $y = 32 - 4x$ ($x \triangleq$ Brenndauer in h; $y \triangleq$ Kerzenlänge in cm)
Auffüllen: $y = 4 + 6x$ ($x \triangleq$ Auffülldauer in h; $y \triangleq$ Wasserstand in cm)

a) Zeichne die Graphen beider Gleichungen in ein gemeinsames Koordinatensystem (x-Achse: 1 cm ≙ 1 h ; y-Achse: 1 cm ≙ 4 cm Wasserstand bzw. Kerzenlänge)



Lösungen: b) 4 cm c) 8 h d) Nach 2 Std. und 48 Min (2,8 h) bei 20,8 cm.

b) Wie hoch ist der Wasserstand im Becken zum Zeitpunkt $x = 0$?

Für $x = 0$ gilt: $y = 4 + 6 \cdot 0 \Leftrightarrow y = 4$
Der Wasserstand beträgt 4 cm.

c) Wie lange würde die Kerze brennen, wenn es kein Wasser im Becken gäbe?

Vgl. Zeichnung: 8 Stunden.
Rechnerisch: Bestimme die Nullstelle des Kerzen-Graphen:
$0 = 32 - 4x \Leftrightarrow 4x = 32 \Leftrightarrow x = 8$

d) Zu welchem Zeitpunkt und bei welchem Wasserstand löscht das steigende Wasser die brennende Kerze?

Schnittpunkt der beiden Graphen: Löse das Gleichungssystem:
$$\begin{array}{|l} \quad y = 32 - 4x \\ \wedge\ y = 4 + 6x \end{array}$$

$\mathbb{L} = \{ (2{,}8 \mid 20{,}8) \}$ 0,8 Std. = $\frac{8}{10}$ von 60 Min. = 48 Min.

Nach 2 Std. und 48 Min. löscht das einlaufende Wasser die Kerze (Wasserstand: 20,8 cm).

❻ Vinzent kratzt sich am Hinterkopf - für welchen Tarif soll er sich entscheiden? Windphone bietet einen Einsteigertarif für 4,95 € Grundgebühr pro Monat. Eine SMS kostet ebenso wie eine Gesprächsminute (egal in welches Netz) 9 Cent.

Bei O3 findet er den LOOK Prepaid-Tarif interessant: Die Gesprächsminute ist zwar hier etwas teurer (0,14 €/Min.), allerdings muss er bei dieser Prepaid-Karte keine monatliche Grundgebühr bezahlen. Eine SMS kostet genauso wie bei Windphone 0,09 €.

Vinzent hat sein Telefonierverhalten in den letzten Monaten extra beobachtet und festgestellt, dass er im Schnitt 90 SMS pro Monat schreibt und gut 80 Minuten pro Monat mit dem Handy telefoniert (seine Freundin ruft er für längere Gespräche immer vom Festnetz aus an).

a) Stelle für jeden Tarif eine Funktionsgleichung auf, mit Hilfe derer du berechnen kannst, welche Kosten pro Monat anfallen, wenn Vinzent x Minuten telefoniert und genau 90 SMS jeden Monat schreibt.

y: Monatliche Kosten in €
x: Anzahl Minuten

Windphone:
$$\begin{aligned} y &= 0{,}09x + 4{,}95 + 90 \cdot 0{,}09 \\ &= 0{,}09x + 4{,}95 + 8{,}10 \\ &= 0{,}09x + 13{,}05 \end{aligned}$$

O3 Look:
$$\begin{aligned} y &= 0{,}14x + 90 \cdot 0{,}09 \\ &= 0{,}14x + 8{,}10 \end{aligned}$$

b) Angenommen, er telefoniert im ersten Monat tatsächlich genau 80 Minuten. Welcher Tarif ist dann günstiger?

$x = 80 \Rightarrow$ Kosten bei Windphone:
$$\begin{aligned} & y = 0{,}09 \cdot 80 + 13{,}05 \\ \Leftrightarrow\ & y = 7{,}20 + 13{,}05 \\ \Leftrightarrow\ & y = 20{,}25 \end{aligned}$$

$x = 80 \Rightarrow$ Kosten bei O3:
$$\begin{aligned} & y = 0{,}14 \cdot 80 + 8{,}10 \\ \Leftrightarrow\ & y = 19{,}30 \end{aligned}$$

Mit der Prepaid-Karte von O3 ist Vinzent bei 80 Minuten besser dran: Hier zahlt er (minimal) weniger, nämlich 19,30 € (im Vergleich zu Windphone: 20,25 €).

c) Wie viele Minuten müsste Vinzent durchschnittlich telefonieren, damit beide Angebote „gleich gut“ sind (d.h. es wäre egal, für welches Angebot er sich entscheidet)?

$y = 0{,}09x + 13{,}05$ (Windphone)
$y = 0{,}14x + 8{,}10$ (O3)

Löse das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{|l} \quad y = 0{,}09x + 13{,}05 \\ \wedge\ y = 0{,}14x + 8{,}10 \end{array}$$

mit dem GTR

GLS umformen

$$\begin{array}{|l} \quad -0{,}09x + y = 13{,}05 \\ \wedge\ -0{,}14x + y = 8{,}10 \end{array}$$

Der Taschenrechner braucht diese spezielle Form, vgl. Seite 49ff!

Gleichsetzen der Rechtsterme:

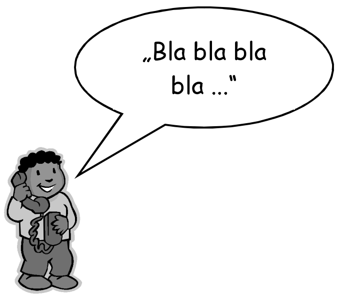
$0{,}09x + 13{,}05 = 0{,}14x + 8{,}10$
$\Leftrightarrow\ -0{,}05x = -4{,}95$
$\Leftrightarrow\ x = 99$

Einsetzen in eine der beiden Funktionsgleichungen (hier : O3):

$y = 0{,}14 \cdot 99 + 8{,}10$
$= 13{,}86 + 8{,}10$
$= 21{,}96$

Bei genau 99 Minuten pro Monat entstünden bei beiden Tarifen dieselben Kosten (nämlich rund 21,96 €).

d) Du kennst Vinzent: Er labert am Telefon oft viel länger als er selbst glaubt. Welchen Tarif würdest du ihm empfehlen?



Wenn Vinzent mehr als 99 Minuten im Monat telefoniert, ist für ihn der Tarif von Windphone günstiger. Trotz der Grundgebühr kommt er wegen des niedrigeren Minutenpreises billiger weg.

e) Erkläre, ob Vinzent die Anzahl der SMS pro Monat bei der Wahl des Tarifes berücksichtigen muss.

Nein, da der Preis für eine SMS bei beiden Anbietern dasselbe kostet (0,09 €), sind diese Kosten für 90 SMS pro Monat als Fixkosten anzusehen (wie eine monatliche Grundgebühr sozusagen).

Lösungen: b) Bei 80 Min. ist der O3-Tarif (minimal) günstiger (19,30 € ↔ 20,25 €).
c) 99 Minuten
d) Bei mehr als 99 Gesprächsminuten pro Monat den Tarif von Windphone.
e) Nein, bei einem direkten Vergleich der Tarife nicht.